

# Limites des suites et des fonctions

## 1. Limite finie en $+\infty$

- 1.1. Définition
- 1.2. Limites et ordre
  - 1.2.1. Propriété
    - ✚ [R.O.C. 201](#)
  - 1.2.2. Théorème des gendarmes
    - ✚ [R.O.C. 202](#)
- 1.3. Applications
  - 1.3.1. Utiliser la définition de  $\lim$  en  $+\infty$  de  $f$
  - 1.3.2. Utiliser le théorème des gendarmes
- 1.4. Exercices d'entraînement et approfondissement

## 2. Limite infinie en $+\infty$

- 2.1. Limites égale à  $+\infty$  en  $+\infty$ 
  - 2.1.1. Définitions
  - 2.1.2. Suites monotones
  - 2.1.3. Propriétés : suites croissantes non majorées, suites décroissantes non minorées
    - ✚ [R.O.C. 203](#) : suite croissante non majorée (voir aussi application)
    - ✚ [R.O.C. 204](#) : suite décroissante non minorée
- 2.2. Limites égale à  $-\infty$  en  $+\infty$ 
  - 2.2.1. Définitions
- 2.3. Asymptote oblique : rappel
- 2.4. Théorème de comparaison
  - 2.4.1. Théorème
    - ✚ [R.O.C. 205](#)
- 2.5. Applications
  - 2.5.1. Utiliser la définition de limite infinie d'une suite [R.O.C. 203](#)
  - 2.5.2. Démontrer qu'une droite est asymptote à  $\mathcal{C}_f$
- 2.6. Exercices d'entraînement et approfondissement

## 3. Extension de la notion de limite d'une fonction

- 3.1. Limite d'une fonction en  $-\infty$
- 3.2. Limite d'une fonction en un réel
  - 3.2.1. Définition
  - 3.2.2. Définition
- 3.3. Applications
  - 3.3.1. Ecrire une définition de limite et l'utiliser
    - ✚ [R.O.C. 206](#) Limite finie ( $= L$ ) en  $-\infty$  ; Limite infinie  $= +\infty$  en  $-\infty$
    - ✚ [R.O.C. 207](#) Limite infinie  $= +\infty$  en un réel  $a$

## 4. Opérations et limites

- 4.1. Limite d'une somme, d'un produit de deux fonctions
- 4.2. Limite d'un quotient de deux fonctions
- 4.3. Formulaires, formes indéterminées de limite
- 4.4. Composée de deux fonctions
  - 4.4.1. Proposition  
**R.O.C. 208**
- 4.5. Composée d'une suite et d'une fonction
  - 4.5.1. Proposition  
**R.O.C. 209**
- 4.6. Limites d'un polynôme et d'une fonction rationnelle en  $+\infty$  et  $-\infty$
- 4.7. Exercices d'applications
  - 4.7.1. Utiliser des règles opératoires sur les limites
  - 4.7.2. Etudier la limite d'une fonction composée
  - 4.7.3. Etudier la limite d'une fonction polynôme et d'une fonction rationnelle en  $+\infty$  et  $-\infty$
  - 4.7.4. Calculer des limites
  - 4.7.5. Lever l'indétermination en effectuant un changement de variables
  - 4.7.6. Déterminer la limite de la composée d'une suite et d'une fonction
- 4.8. Exercices d'approfondissement

## 5. Etude de la fonction tangente

## 6. Sujets bac, Bac blanc

- ✚ **R.O.C. 210** : suite croissante non majorée

$$f(x) = x^3 + x^2$$

$$a_n^3 + a_n^2 \leq M^3 + m^2$$

- ✚ **R.O.C. 211** : suite décroissante non minorée

$$f(x) = \sin x - 2x$$

[Haut du document](#)

<b>ROC : Limites des suites et des fonctions</b>	
<a href="#">ROC 201</a>	<a href="#">Limites et ordre : Propriété</a>
ROC 202	Limites et ordre : Théorème des gendarmes
ROC 203	Suite croissante non majorée (voir aussi application)
ROC 204	Suite décroissante non minorée
ROC 205	Théorème de comparaison
ROC 206	Ecrire une définition de limite et l'utiliser Limite finie ( $= L$ ) en $-\infty$ ; Limite infinie $= +\infty$ en $-\infty$
ROC 207	Ecrire une définition de limite et l'utiliser : Limite infinie $= +\infty$ en un réel $a$
ROC 208	Composée de deux fonctions : Proposition
ROC 209	Composée d'une suite et d'une fonction : Proposition
ROC 210	Sujet bac : suite croissante non majorée : $f(x) = x^3 + x^2$ ; $a_n^3 + a_n^2 \leq M^3 + m^2$
ROC 211	Sujet bac : suite décroissante non minorée : $f(x) = \sin x - 2x$

[Haut du document](#)

## 201 ROC

## R.O.C. LIMITES ET ORDRE

Télécharger ROC 201 limite et ordre au format :				
calculatrice	<a href="#">PDF</a>	WORD	WEB	OPEN O

**Prérequis :** Définition d'une limite fini en  $+\infty$  :

Soit  $L$  un réel et  $f$  une fonction définie sur un intervalle de la forme  $[r ; +\infty[$ , avec  $r$  un réel. Dire que  $f(x)$  admet pour limite  $L$ , lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  signifie que tout intervalle ouvert contenant  $L$ , contient toutes les valeurs de  $f(x)$  pour tout  $x$  assez grand :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f = L \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

**Énoncé :**

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur un intervalle  $[a ; +\infty[$ ,  $L$  et  $L'$  deux réels tels que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = L'$$

**1)** On suppose  $L$  et  $L'$  tel que  $L > L'$ , et  $a$  un réel tel que  $L > a > L'$ . En appliquant la définition de la limite, démontrer que, pour  $x$  assez grand

$$f(x) > a > g(x)$$

**2)** En déduire que :

$$\text{si } f \leq g, \text{ alors } L \leq L'$$

**3)** En comparant

$$\frac{1}{x} \text{ et } \frac{1}{x+1}$$

sur  $]0 ; +\infty[$ ,

démontrer qu'on peut avoir :

$$f < g \quad \text{et} \quad L = L'.$$

**Démonstration**

[Haut du document](#)

**Démonstration**

1) On suppose  $l$  et  $l'$  tel que

$$L > L' ,$$

et  $a$  un réel tel que

$$L > a > L'.$$

démontrons que, pour tout réel  $x$  assez grand

$$f(x) > a > g(x).$$

En effet

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = L'$

et

- $x \rightarrow +\infty$

Donc

- l'intervalle  $] -\infty ; a[$  contient  $L'$ ,
- et donc contient aussi tous les réels  $g(x)$  pour tout  $x$  assez grand,

c'est à dire pour tout  $x$  supérieur à un réel  $b_1$  :  $x > b_1$

puisque (par définition)

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = L'$

(Autrement dit :  $g(x) \in ] -\infty ; a[$  pour tout  $x \in [b_1 ; +\infty[$ ).

De même

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$

et

Donc

- l'intervalle  $[a ; +\infty[$  contient ,
- et donc contient aussi tous les réels  $g(x)$  pour tout  $x$  assez grand,

c'est à dire pour tout  $x$  supérieur à un réel  $b_2$  :  $x > b_2$

puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$  (par définition)

(Autrement dit :  $g(x) \in ] -\infty ; a[$  pour tout  $x \in [b_2 ; +\infty[$ ).

Soit

$$b = \max(b_1 ; b_2)$$

comme

$$L > a > L'$$

donc

$$f(x) > a > g(x)$$

pour tout

$$x > b.$$

2) On en déduit que

si  $f \leq g$ ,  
alors on ne peut pas avoir

$$L > L'$$

Donc  $L < L'$ .

2) Comparons

$$\frac{1}{x} \text{ et } \frac{1}{x+1}$$

sur  $]0; +\infty[$ ,

et démontrons qu'on peut avoir :

$$f < g \text{ et } L = L'.$$

soit  $f(x) = \frac{1}{x+1}$

et  $g(x) = \frac{1}{x}$ .

En effet Sur  $]0; +\infty[$

$$x + 1 > x$$

donc  $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{x}$

soit  $f(x) < g(x)$  sur  $]0; +\infty[$  (1).

Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$

Donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  (2).

Ainsi on démontre ici, d'après (1) et (2) qu'on peut avoir

$$f < g$$

[Haut du document](#)