Page d'accueil	Terminale S	Cours Calculatrices	ROC	ROC LIMITES

Limites des suites et des fonctions

Haut du document

ROC : Limites des suites et des fonctions	
ROC 201	Limites et ordre : Propriété
ROC 202	Limites et ordre : Théorème des gendarmes
ROC 203	Suite croissante non majorée (voir aussi application)
ROC 204	Suite décroissante non minorée
ROC 205	Théorème de comparaison
ROC 206	Ecrire une définition de limite et l'utiliser Limite finie $(= L)$ en $-\infty$; Limite infinie $= +\infty$ en $-\infty$
ROC 207	Ecrire une définition de limite et l'utiliser : Limite infinie = + ∞ en un réel a
ROC 208	Composée de deux fonctions : Proposition
ROC 209	Composée d'une suite et d'une fonction : Proposition
ROC 210	Sujet bac : suite croissante non majorée : $f(x) = x^3 + x^2$; $a_n^3 + a_n^2 \leq M^3 + m^2$
ROC 211	Sujet bac : suite décroissante non minorée : $f(x) = \sin x - 2x$

Haut du document

201 ROC

R.O.C. LIMITES ET ORDRE

Télécharger ROC 201 limite et ordre au format :				
calculatrice	PDF	WORD	WEB	0PEN 0

Prérequis : Définition d'une limite fini en +∞ :

Soit L un réel et f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[r\,;\,+\infty[$, avec r un réel. Dire que f (x) admet pour limite L, lorsque x tend vers $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert contenant L, contient toutes les valeurs de $f\,(x)$ pour tout x assez grand :

$$\lim_{+\infty} f = L \qquad et \qquad \lim_{x\to+\infty} f\,(x) = L$$

Enoncé :

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle $[a\,;\,+\infty[$, L et L' deux réels tels que

$$\lim_{x\to+\infty} f\,(x) = L \qquad et \qquad \lim_{x\to+\infty} g\,(x) = L'$$

1) On suppose L et L' tel que $L > L'$, et a un réel tel que $L > a > L'$.
En appliquant la définition de la limite, démontrer que, pour x assez grand

$$f\,(x) > a > g\,(x)$$

2) En déduire que :

$$\text{si } f \leq g\,, \quad \text{alors } L \leq L'$$

3) En compai ·

$$\frac{1}{x} \quad et \quad \frac{1}{x+1}$$

sur $]0\,;\,+\infty[$,

démontrer qu'on peut avoir :

$$f < g \qquad \text{et} \qquad L = L'.$$

Démonstration

Haut du document

Démonstration

1) On suppose l et l' tel que

$$L > L',$$

et a un réel tel que

L > a > L'.

démontrons que, pour tout réel x assez grand

$$f(x) > a > g(x).$$

En effet •

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = L'$$

et •

Donc • l'intervalle $]-\infty\,;\,a[$ contient L',

• et donc contient aussi tous les réels $g(x)$ pour tout x assez grand,

c'est à dire pour tout x supérieur à un réel $b1$: $x > b1$

puisque (par définition)

• $\lim_{x \to +\infty} g(x) = L'$

(Autrement dit : $g(x) \in]-\infty\,;\,a[$ pour tout $x \in [b1\,;\,+\infty[$).

De même

• $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$

et

Donc • l'intervalle $[a\,;\,+\infty[$ contient ,

• et donc contient aussi tous les réels $g(x)$ pour tout x assez grand,

c'est à dire pour tout x supérieur à un réel $b2$: $x > b2$

puisque $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ (par définition)

(Autrement dit : $g(x) \in]-\infty\,;\,a[$ pour tout $x \in [b2\,;\,+\infty[$).

Soit $b = max\,(b1\,;\,b2)$

comme $L > a > L'$

donc $f(x) > a > g(x)$

pour tout $x > b$.

2) On en déduit que

si $f \leq g$,

alors on ne peu pas avoir

$$L > L'$$

Donc $L < L'$.

2) Comparons

$$\frac{1}{x} \quad et \quad \frac{1}{x+1}$$

sur $]0\,;\,+\infty[$,

et démontrons qu'on peut avoir :

$$f < g \qquad et \qquad L = L'.$$

soit $$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

et $$g(x) = \frac{1}{x}.$$

En effet Sur $]0\,;+\infty[$

$$x + 1 > x$$

donc $$\frac{1}{x+1} < \frac{1}{x}$$

soit $f(x) < g(x)$ sur $]0\,;\,+\infty[$ (**1**).

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ (**2**).

Ainsi on démontre ici, d'après (**1**) et (**2**) qu'on peut avoir

$$\boldsymbol{f < g}$$

Haut du document